П. С. Краснощеков, Простейшая математическая модель поведения. Психология конформизма, *Матем. моделирование*, 1998, том 10, номер 7, 76–92

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

том **10** номер **7** год **1998**

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

ПРОСТЕЙШАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПОВЕДЕНИЯ. ПСИХОЛОГИЯ КОНФОРМИЗМА

© *П.С. Краснощеков*

Исследуется простейшая модель коллективного поведения. Основное внимание уделено анализу типичных примеров, дается качественный анализ и содержательная интерпретация.

THE SIMPLEST MATHEMATICAL MODEL OF BEHAVIOUR. PSYCHOLOGY OF CONFORMISM

P.S. Krasnoschekov

The simplest model of collective behaviour is investigated. Considerable attention is given to the analysis of typical examples, qualitative analysis is given and their interpretation.

Меня всегда удивляла, а порой и забавляла, весьма распространенная ситуация, когда люди действуют вопреки своим убеждениям, а то и интересам. Априорные декларации далеко не всегда соответствуют их поступкам. В свое время даже бытовала поговорка: “каждый по отдельности – против, а все вместе – за”. В ней достаточно образно подмечена осторожная привычка людей вести себя “как все”. Чтобы объяснить это парадоксальное явление, необходимо угадать механизм, лежащий в основе такого поведения. Я в этой статье предлагаю для обсуждения очень простую версию подобного механизма и на реальных примерах пытаюсь оценить его адекватность.

1. Построение модели

Сначала обсудим некоторые предпосылки и введем основные понятия. Примем достаточно очевидную гипотезу. Будем считать, что индивид, принимая решение по тому или иному вопросу, руководствуется как своим личным мнением, так и отношением к этому вопросу окружающих его субъектов (коллектива). Например, человек может решать такие проблемы: вступать ли в данную партию, участвовать ли в данном мероприятии, голосовать ли за данное предложение и т.п. Во всех этих случаях (отвлекаясь от их содержательной стороны) индивиду предстоит сделать выбор: перейти ему в некоторое конкретное состояние или нет. Вообще говоря, альтернатив может быть сколько угодно, и каждая из них может рассматриваться отдельно, или все вместе как одна, так как речь здесь идет о намерениях, а не о самом пребывании в данном состоянии. Альтернативы, рассматриваемые как некоторые конкретные состояния, могут быть совместными или несовместными. Не отдающий себе в этом отчета индивид может выразить намерение пребывать во всех или в части из них одновременно, но реализовать эти намерения ему не всегда удастся. Например, на президентских выборах правила запрещают голосовать одновременно за двух и более кандидатов, но избиратель может об этом не знать или проголосовать так намеренно, и в обоих случая бюллетень признают недействительным. Поэтому под состоянием может пониматься любая, сколь угодно сложная, и даже противоречивая конструкция.

Чтобы построить математическую модель поведения индивида, необходимо ввести количественные оценки его отношения к данному состоянию. Таких оценок в простейшем случае можно выделить две: личное априорное (до общения с коллективом) отношение к состоянию, которое определяется a_j, вероятностью того, что индивид готов перейти в это состояние; и финальное апостериорное отношение, сформировавшееся после общения с коллективом, выражающееся вероятностью P_j окончательного решения перейти в данное состояние. Например, некто априори против рыночной экономики, однако, видя реакцию окружающих людей, часть которых за такую экономику, может пересмотреть свое отношение и апостериорное решение принять в пользу рыночной экономики. Может, конечно, и не поддаться влиянию, если он личность независимая, т.е. его апостериорное отношение будет совпадать с априорным. Очевидно, математическая модель поведения должна учитывать весь спектр индивидов: от абсолютно зависимых до абсолютно независимых. Поэтому введем еще одну характеристику индивида, число μ_j, определяющее вероятность того, что в данной конкретной ситуации индивид ведет себя, как независимый. Если $\mu_j=1$, то имеет место абсолютная независимость, если $\mu_j=0$ – абсолютная зависимость.

Итак, у абсолютно независимого индивида апостериорная вероятность P_j^1 совпадает с априорной: α_j. Определим теперь апостериорную вероятность P_j^0 для абсолютно зависимого индивида. Для этого примем простейшую схему. Будем считать, что влияние каждого i-го члена коллектива на данного j-го индивида не зависит от влияния любого другого из остальных членов и определяется числом λ_{ji} – вероятностью того, что j-й индивид поступит так же, как и i-й, т.е. перейдет в новое состояние с вероятностью P_i. Тогда полная вероятность перехода j-го абсолютно зависимого индивида в новое состояние будет равна

$$P_j^0 = \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i,$$

где N – число членов коллектива, $\lambda_{jj}\equiv 0$ (абсолютно зависимый индивид не влияет на себя по определению), $\sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} = 1$, и все $\lambda_{ji}>0$ (кроме λ_{jj}), так как мы полагаем, что на абсолютно зависимого индивида влияет любой член коллектива. Найдем апостериорную вероятность для произвольно выбранного j-го индивида. Применяя формулу полной вероятности, получим

$$P_j = P_j^1 \mu_j + (1-\mu_j) P_j^0, \quad j=1,2,\ldots,N,$$

или в развернутом виде

$$P_j = \alpha_j \mu_j + (1-\mu_j) \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ji} P_i, \qquad j=1,2,\ldots,N. \tag{1.1}$$

Эти соотношения и представляют собой искомую модель общего вида при тех упрощениях, которые мы приняли. При заданных параметрах (α,μ,λ) из нее должны определиться апостериорные вероятности (P). В векторной форме она имеет вид

$$P=AM+(E-M)\Lambda P, \tag{1.2}$$

где Λ – стохастическая матрица (λ_{ji}), M – диагональная матрица (μ_j), E – единичная, A и P – векторы с компонентами α_j и P_j соответственно.

Докажем, что решение системы (1.1) существует и $0\le P_j\le 1$. На этом построение общей модели будет завершено. Перепишем для удобства (1.2) в виде

$$(E-B)P=AM, \tag{1.3}$$

где матрица $B=(E-M)\Lambda$.

Пусть не все $\mu_j=0$ (случай $\mu_j\equiv 0$ мы исследуем отдельно). Сначала будем считать, что все $\mu_j\ne 1$. Матрица B неотрицательна. Более того, она неразложима, начиная с $N>2$, так как ее квадрат строго больше нуля (на тривиальном случае $N\le 2$ мы не останавливаемся). По теореме Фробениуса [1] такая матрица всегда имеет положительное характеристическое число r с максимальным модулем, которое является простым корнем характеристического уравнения и удовлетворяет неравенству $s\le r\le S$, где s и S – минимальная и максимальная суммы элементов строк матрицы B соответственно. Строгое равенство достигается лишь при $s=S$. В нашем случае отсюда следует, что $r<1$. Как известно [1], это гарантирует существование и неотрицательность матрицы, обратной к $(E-B)$. Следовательно, решение системы (1.1) единственно и неотрицательно. Докажем теперь, что по норме оно не превосходит единицы, т.е. $\max P_j\le 1$. Для этого разобьем все индексы j на две группы: K и R. В группу K отнесем все индексы $j=k$, при которых $\mu_j=0$, а в группу R – остальные $j=r$. Систему уравнений (1.1) с учетом приведенного разбиения можно представить в виде

$$P_r=\alpha_r\mu_r+(1-\mu_r)\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ri}P_i,\quad r\in R,$$

$$P_k=\sum_{i=1}^{N}\lambda_{ki}P_i,\quad k\in K.$$

Обозначим через M все множество индексов $j=m$, при которых реализуется $\max P_j=P_m$. Докажем, что в группе индексов R содержится хотя бы один индекс из множества M. Действительно, в противном случае для всех $m\in M$ имело бы место

$$P_m=\sum_{i=1}^{N}\lambda_{mi}P_i,$$

а это равенство возможно лишь тогда, когда все $P_i=P_m$, так как $\sum_{i=1}^{N}\lambda_{mi}=1$, все $\lambda_{mi}>0$ и все $P_i\ge 0$. Следовательно, множество M совпадало бы со всем множеством индексов $j=1,2,\dots,N$, а это приводит к противоречию с предположением, что в R не содержится ни одного индекса из множества M. Таким образом, группа индексов R содержит хотя бы один индекс из множества M. Но тогда при этом индексе имеет место равенство

$$\max P_j=\alpha_m\mu_m+(1-\mu_m)\sum_{i=1}^{N}\lambda_{mi}P_i,$$

откуда следует, что

$$\max P_j \le \mu_m + (1-\mu_m)\sum_{i=1}^{N}\lambda_{mi}\max P_j = \mu_m + (1-\mu_m)\max P_j = \mu_m(1-\max P_j) + \max P_j\,,$$

а это приводит к неравенству: $\mu_m(\max P_j - 1) \le 0$. Так как $\mu_m > 0$, то выполнено $\max P_j \le 1$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим, наконец, случай, когда в коллективе часть индивидов абсолютно независима, т.е. у каждого из них $\mu_s=1$, $s \in S \subseteq J$ (здесь через J обозначено все множество индексов j). Исходная матрица B теперь становится разложимой, и это естественно, так как в коллективе выделяется независимая группа. Однако никаких принципиальных трудностей в связи с этим не появляется: поведение независимой группы определяется как априорное ($P_s=\alpha_s$), порядок системы понижается, а новая матрица B^* как неразложимый минор матрицы B сохраняет все необходимые свойства. Поэтому проблем с существованием, единственностью, неотрицательностью и ограниченностью решения не возникает.

2. Исследование модели

Так как предлагаемая модель построена на основе здравого смысла, то оправданием ей может служить успешная проверка на простых и прозрачных примерах. Если окажется, что интерпретации, которые позволяет делать эта модель в рассматриваемых примерах, будут содержательными, то с нашей точки зрения это оправдает примитивизм, положенный в ее основу, и придаст ей определенную эвристическую ценность.

Стадо. Сначала проведем обещанный нами ранее анализ случая, когда все индивиды абсолютно зависимы, т.е. все $\mu_i=0$. В этом случае матрица $M=0$, и уравнение (1.3) принимает вид $(E-\Lambda)P=0$. Суммы элементов каждой из строк матрицы $E-\Lambda$, в силу свойств стохастической матрицы Λ, равны нулю. Следовательно, определитель матрицы $E-\Lambda$ равен нулю, а это, как известно, обеспечивает существование решения и его неединственность. Последнее вполне объяснимо, так как в коллективе абсолютно зависимых индивидов нет индивида с более или менее определенными устремлениями. Однако поведение индивидов в таком коллективе не является хаотичным. Несмотря на неопределенность состояния коллектива, все индивиды ведут себя, в некотором смысле, как единое целое: все P_j равны между собой, т.е. индивиды подражают друг другу.

Действительно, из (1.1) следует

$$P_j = \sum_{i=1}^{N}\lambda_{ji}P_i.$$

Предположим, что не все P_j равны между собой. Тогда среди них должны быть максимальные $P_j=P_m$. Следовательно,

$$P_m = \sum_{i=1}^{N}\lambda_{mi}P_i,$$

а это, в силу свойств матрицы Λ, как мы видели ранее, возможно лишь, когда все P_i равны между собой. Таким образом, индивиды ведут себя, как единое целое.

Требование неразложимости матрицы Λ обусловлено представлением о том, что подразумевается под понятиями *коллектив* и *абсолютная зависимость*. Если допустить, что матрица Λ разложима, придем к тому, что в основном коллективе могут возникнуть независимые друг от друга *подколлективы*, что, вообще говоря, нехорошо, так как предполагает либо отсутствие контактов между отдельными частями коллектива, либо противоречит абсолютной зависимости индивидов. В дальнейшем мы увидим, что отдельные *подколлективы* (их можно называть *партиями*) могут возникать в общем коллективе, но это будет обусловлено наличием в нем лидеров различных ориентаций.

Однако "вернемся к нашим баранам". Исследуемый здесь коллектив абсолютно зависимых индивидов очень напоминает стадо без вожака, или неориентированную уличную толпу. Поведение индивидов непредсказуемо, хотя действуют они как единое целое, т.е. переходят в новое состояние с одной для всех вероятностью P, значение которой, вообще говоря, произвольно. Однако из этого безразличного состояния коллектив легко выводится любым провоцирующим действием (формально, любым малым возмущением одного из параметров μ_i): достаточно одному из индивидов как-то сориентироваться, весь коллектив следует за ним. Действительно, если в коллективе вдруг появился индивид, у которого $\mu_k \neq 0$, то ситуация резко меняется. Решение становится единственным: у всех индивидов $P_j = \alpha_k$, где α_k – априорная вероятность k-го индивида. Проверяется это простой подстановкой $P_j = \alpha_k$ в уравнения системы (1.1). Таким образом, поведение k-го индивида копируют все. Не зря с древних времен бытует поговорка: "дурная овца все стадо портит". Теперь понятно, почему этот пункт был озаглавлен: *стадо*. В этом смысле абсолютно зависимого индивида условно можно было бы называть "стадным".

Кажется естественным в первую очередь исследовать коллективы, в которых при условии абсолютной зависимости индивиды не отдают друг другу персональных предпочтений. В таком коллективе $\lambda_{ji} = (1-\delta_{ji})/(N-1)$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Действительно, в общем случае у нас нет никаких разумных априорных соображений о том, как назначать параметры λ_{ji}, а заниматься апостериорной подгонкой под ответ с научных позиций неэтично. Поэтому постараемся оставаться в рамках простых и разумных предположений. В дальнейшем, за некоторыми исключениями, мы будем работать в пределах предложенной схемы. Исследовать примеры начнем с самого простого.

Митинг. Прежде, чем разбирать этот пример, построим аналитическое решение системы (1.1), когда $\lambda_{ji} = (1-\delta_{ji})/(N-1)$. Система уравнений принимает следующий вид:

$$P_j = \alpha_j \mu_j + (1-\mu_j)\frac{\sum_{i=1}^{N}(1-\delta_{ji})P_i}{N-1}, \quad j=1,2,\ldots,N. \qquad (2.1).$$

Этот вариант модели легко интерпретируется. Дробь, стоящая в правой части (2.1), представляет собой математическое ожидание доли индивидов (помимо j-го), перешедших в данное состояние. Таким образом, индивид ориентируется на свое априорное отношение к данному состоянию (определяемое величиной вероятности α_j) и на долю остальных членов коллектива, перешедших в это состояние. Персоналий он не различает. Система (2.1) имеет аналитическое решение, которое, опуская элементарные выкладки, мы приведем сразу:

$$P_j = \frac{N-1}{N-\mu_j}\alpha_j\mu_j + N\frac{1-\mu_j}{N-\mu_j}\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i/(N-\mu_i)}{\sum_{i=1}^{N}\mu_i/(N-\mu_i)}, \qquad \frac{M}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i/(N-\mu_i)}{\sum_{i=1}^{N}\mu_i/(N-\mu_i)}. \qquad (2.2)$$

Здесь $M = \sum_{i=1}^{N} P_i$ – математическое ожидание числа индивидов, перешедших в данное состояние. При больших N формулы (2.2) упрощаются:

$$P_j = \alpha_j\mu_j + (1-\mu_j)\frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i}{\sum_{i=1}^{N}\mu_i}, \qquad \frac{M}{N} = \frac{\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i}{\sum_{i=1}^{N}\mu_i}. \tag{2.3}$$

И в случаях, когда N достаточно велико, мы будем использовать эти формулы. Например, на уличных митингах, где собираются толпы людей, такого приближения вполне достаточно. Эта ситуация в весьма упрощенном виде сейчас и будет рассмотрена. Пусть на митинге выступают два лидера, находящиеся друг к другу в оппозиции: у первого лидера $\alpha_1=1$, $\mu=\mu_1$; у второго – $\alpha_2=0$, $\mu=\mu_2$. У толпы, в силу специфики уличного сборища, все $\mu_j=0$, а разброс мнений достаточно широк, т.е. α_j – разные. Из (2.3) следует, что при стадном менталитете толпы ($\mu_j=0$), разброс мнений никакой роли не играет: индивиды отрекаются от своих убеждений, толпа делится на две части в отношении μ_1/μ_2: за первым лидером идет часть, равная $\mu_1/(\mu_1+\mu_2)$, за вторым соответственно $\mu_2/(\mu_1+\mu_2)$. К более уверенному и решительному лидеру присоединяется большая часть толпы. В данной модели политическая платформа лидеров, как видим, роли не играет. Тривиальный случай, когда лидеры собирают на митинг только своих единомышленников, мы разбирать не будем.

Переговоры. Выше исследовалось влияние лидеров на поведение абсолютно зависимых индивидов в однородном коллективе. Чтобы посмотреть, как лидеры влияют друг на друга, рассмотрим дипломатические переговоры представителей двух стран по некоторому вопросу, например, вступать ли Восточной Европе в НАТО. Будем считать, что *1-й* лидер априорно ***за***, т.е. $\alpha_1=1$, и его $\mu=\mu_1$, а *2-й* лидер априорно ***против***, т.е. $\alpha_2=0$, и его $\mu=\mu_2$. Переговоры ведутся в течение многих туров так, что апостериорная вероятность после каждого n-го тура у каждого лидера становится априорной для следующего, $n+1$-го, тура, т.е. $P_1^{(n)}=\alpha_1^{(n+1)}$, $P_2^{(n)}=\alpha_2^{(n+1)}$, причем $\alpha_1^{(1)}=1$, $\alpha_2^{(1)}=0$. Так как в данном случае $N=2$, то придется воспользоваться формулами (2.2). Из них, опуская промежуточные выкладки, получим следующие рекуррентные соотношения:

$$P_1^{(n+1)} = P_1^{(n)} - \Phi(\mu_1,\mu_2)\Psi^n, \qquad P_2^{(n+1)} = P_2^{(n)} + \Phi(\mu_2,\mu_1)\Psi^n,$$
$$M^{(n+1)} = M^{(n)} - [\Phi(\mu_1,\mu_2) - \Phi(\mu_2,\mu_1)]\Psi^n, \tag{2.4}$$

где

$$P_1^{(0)}=\alpha_1^{(1)}=1,\ P_2^{(0)}=\alpha_2^{(1)}=0,\ M^{(0)}=1,$$

а

$$\Phi(\mu_1,\mu_2) = \frac{\mu_2(1-\mu_1)}{\mu_1\mu_2+\mu_1(1-\mu_2)+\mu_2(1-\mu_1)}, \quad .\Psi = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1\mu_2+\mu_1(1-\mu_2)+\mu_2(1-\mu_1)},$$

$$\Phi(\mu_1,\mu_2) - \Phi(\mu_2,\mu_1) = \frac{\mu_2-\mu_1}{\mu_1\mu_2+\mu_1(1-\mu_2)+\mu_2(1-\mu_1)}. \tag{2.5}$$

Решение рекуррентных уравнений (2.4) при μ_1 и μ_2, больших нуля и меньших единицы (это гарантирует значение $\Psi<1$), находится без труда и имеет вид

$$P_1^{(n+1)} = 1 - \Phi(\mu_1,\mu_2)\frac{1-\Psi^n}{1-\Psi}, \qquad P_2^{(n+1)} = \Phi(\mu_2,\mu_1)\frac{1-\Psi^n}{1-\Psi},$$

$$M^{(n+1)} = 1 - [\Phi(\mu_1, \mu_2) - \Phi(\mu_2 \mu_1)] \frac{1 - \Psi^n}{1 - \Psi}. \tag{2.6}$$

Условимся переговоры считать результативными для *1-го* лидера, если к окончанию переговоров на некотором *k-м* туре он добился определенных уступок от *2-го* лидера, т.е. математическое ожидание $M^{(k)}$ стало больше единицы; для *2-го* лидера, естественно, наоборот: переговоры результативны, если он добился уступок, т.е. $M^{(k)}$ стало меньше единицы. Переговоры будут считаться безрезультатными, если $M^{(n)} \equiv 1$ $(1 \le n \le k)$. Последний вариант очевиден. Он реализуется в случае, когда $\mu_1 = \mu_2 = \mu$. Действительно, при $0 < \mu < 1$ из (2.6) видно, что $M^{(n)}$ от тура к туру не меняется, оставаясь равным единице. При $\mu = 0$ стороны будут пребывать в состоянии "дружной" неустойчивой неопределенности: любое случайное внешнее влияние может привести их к любому решению. При $\mu = 1$ лидеры абсолютно независимы и друг другу не уступят. Поэтому переговоры могут быть результативными лишь при условии, что хотя бы один из лидеров не является абсолютно независимым. Тривиален случай, когда у одного из лидеров $\mu = 0$, а у другого $\mu > 0$: абсолютную победу ($M^{(1)} = 2$ или $M^{(1)} = 0$) одерживает в первом туре тот лидер, у которого $\mu > 0$. Остается случай, когда у обоих лидеров $\mu > 0$, но у одного из них $\mu < 1$.

Из формул (2.6) видно, что математическое ожидание $M^{(n)}$ является строго монотонной функцией номера тура n, так как $\Psi < 1$. При $\mu_1 > \mu_2$ она строго возрастает с увеличением номера тура, потому что из (2.5) следует, что $\Phi(\mu_1, \mu_2) < \Phi(\mu_2, \mu_1)$; при $\mu_1 < \mu_2$ строго убывает. Следовательно, в каждом туре выигрывает тот лидер, у которого μ больше, т.е. проигрывает более "мягкотелый". Отсюда, между прочим, следует, что в продолжении переговоров должен быть заинтересован тот лидер, который побеждает, чтобы "додавить мягкотелого". При $n \to \infty$ выигрыш будет максимальным, равным

$$M^{\infty} = 1 + \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1(1 - \mu_2) + \mu_2(1 - \mu_1)}, \tag{2.7}$$

причем, если у одного из лидеров $\mu = 1$, то он одержит абсолютную победу ($M^{\infty} = 2$ или $M^{\infty} = 0$), как с очевидностью следует из (2.7).

В заключение этого пункта еще раз напомним, что модель не учитывает никаких логических аргументов сторон. Однако, мне кажется, что такие аргументы мало чего стоят в реальной жизни, когда речь идет о существенных интересах. Скорее, на первый план здесь выступает психология, а параметр μ как раз и характеризует психический тип индивида.

Рабочий коллектив. До сих пор мы рассматривали качественные примеры, т.е. не проводили никаких вычислений и не привлекали численных материалов для сравнения. Попробуем теперь получить некоторые количественные результаты также на простом и прозрачном примере. Рассмотрим однородный рабочий коллектив во главе с начальником, у которого $\alpha_1 = 1$ и $\mu_1 = 1$, а у остальных членов коллектива все $\alpha_j = \alpha$ и все $\mu_j = \mu$. Обращаясь к точному решению (2.2), получим

$$\frac{M}{N} = \frac{N - \mu + \alpha\mu(N - 1)^2}{N - \mu + \mu(N - 1)^2}. \tag{2.8}$$

Из этой формулы видно, что при $N \to \infty$ $M/N \to \alpha$, т.е. коллектив становится неуправляемым: взаимное влияние индивидов друг на друга подавляет влияние начальника, если, конечно, не придерживаться маловероятного предположения, что все они единомышленники начальника, т.е. $\alpha = 1$. Поэтому возникает естественная задача о *рациональном количественном составе* *рабочего коллектива*: каков должен быть состав коллектива, чтобы доля M/N его членов, выполняющих указания начальника, была не меньше, чем Q? Чтобы ответить на этот вопрос, необходимо решить следующее неравенство:

$$(Q-\alpha)\mu(N-1)^2-(1-Q)(N-1)-(1-Q)(1-\mu)\le 0. \qquad (2.9)$$

Первый же взгляд на (2.9) показывает, что это неравенство выполняется при любых N, если $\alpha\ge Q$. Это означает, что коллектив готов на большее, чем от него минимально требуется. В таком коллективе некоторые сотрудники могут искать работу, жалуясь на начальника, что он их мало загружает. Такие случаи в рабочей практике встречаются, однако наиболее типичной является ситуация, когда $\alpha<Q$. Поэтому разумно рассчитывать на некоторого *среднего* индивида: в меру независимого (μ=1/2) и в меру усердного (α=1/2). Стопроцентной производительности от такого индивида требовать невозможно, поэтому попробуем задать Q=0.75. В этом случае решение неравенства (2.9) показывает, что коллектив вместе с начальником не должен превышать 3~4 человек, чтобы влияние начальника обеспечивало заданную производительность Q=0.75. При Q=0.66 получаем: 6~7 человек. В первом случае "бездельничать" в среднем будет 1 человек, во втором – 2 человека. Как видим, цифры получились вполне реальные. Примерно такую численность имеют рабочие группы, сектора, бригады и т.п. Если же численность коллектива таких индивидов произвольно увеличивать, то влияние начальника, как мы уже знаем, будет падать, и при достаточно больших N половина коллектива в трудовом процессе участвовать не будет. Любопытно, что при больших N сокращением коллектива наполовину, как это часто рекомендует "большое начальство", проблема производительности не решается, так как из оставшейся половины половина опять работать не будет, а число работающих уменьшится вдвое. Поэтому реально проблема решается не сокращениями, а правильной организацией коллектива и трудового процесса: структуризацией коллектива, т.е. разбиением его на вложенные друг в друга подразделения и организацией иерархической системы подчинения и контроля, как это обычно и делается.

Парламент. Хорошей проверкой модели на адекватность может служить применение ее для предсказания результатов голосования в парламенте. Для этого здесь будут использованы фактические материалы 3-го внеочередного Съезда народных депутатов СССР, на котором был избран первый президент СССР. Причина такого выбора проста. Во-первых, о нем имеется подробный отчет, во-вторых, структура депутатского корпуса тех времен была проста и прозрачна: легко просматривалась партия будущего президента, оппозиция и, так называемое, "болото". К тому же можно считать, что этот съезд уже в историческом прошлом, и обращение к его материалам ничьих интересов не затрагивает. Так как на этом съезде председатель был благополучно избран в конце сьезда в президенты, то далее, ради простоты, условимся называть его президентом.

Итак, пусть имеется парламент, состоящий из N членов, среди которых q членов партии президента, p членов оппозиции, а остальные r – "болото". Естественно считать, что у президента и его партии имеется твердая независимая позиция по каждому обсуждаемому вопросу, и при голосовании они действуют как единое целое, т.е. μ=1, а P_j=α_j=1 (в тех случаях, когда они голосуют против, естественно, P_j=0, но, очевидно, что вопрос можно переформулировать на противоположный, и тогда всегда будет P_j=α_j=1). Оппозицию тоже будем считать единой в решениях, т.е. группой независимых (μ_j=1) единомышленников, у которой, в отличие от партии президента, P_j=α_j=0. "Болото" полагается однородным: все μ_j=μ, α_j=α. Воздержавшиеся в рамках этой модели ничем не отличаются от не участвующих в голосовании, и мы будем их отбрасывать.

Так как депутатский корпус съезда был большой (порядка 2000 человек), то уместно использовать приближенные формулы (2.3). Из них следует, что "за" проголосует доля депутатов, равная

$$\frac{M}{N}=\frac{q+r\mu\alpha}{p+q+r\mu}. \qquad (2.10)$$

Будем называть "болото" *идеальным*, если μ=0. Тогда (2.10) упрощается

$$\frac{M}{N}=\frac{q}{p+q}=c. \qquad (2.11)$$

Последняя величина имеет определенный внутренний смысл. Анализируя формулу (2.10), нетрудно усмотреть, что в случае $\alpha<c$, президенту выгодно, чтобы представители "болота" были более зависимы (чем меньше μ, тем лучше), т.е. президент заинтересован в существовании *идеального* "болота". Если же $\alpha>c$, то ему выгодно, чтобы μ было ближе к 1, т.е. "болото" отсутствовало.

Обработка данных съезда показывает, что на нем партия президента составляла примерно q=1000 человек, оппозиция около p=250 человек, остальные r представляли "болото". Здесь следует дать некоторое разъяснение. Так как на каждом заседании присутствовали и голосовали отнюдь не все депутаты, то с вычислением r есть определенные трудности. Чтобы обойти их, придется принять гипотезу, что все представители партии президента и оппозиции, как наиболее заинтересованные, практически полностью участвовали в голосовании. Тогда количество представителей "болота" r от голосования к голосованию будет разным, и поэтому в каждом голосовании будет вычисляться по данным съезда отдельно. Частично выручает тот факт, что в случае идеального "болота" (μ=0), как видно из (2.11), от величины "болота" результат не зависит. Идеальное "болото" при голосовании делится в отношении $c=q/(p+q)$. В том случае, когда нам понадобится величина r, будем пользоваться ее средним значением.

При обработке результатов съезда были выделены только те вопросы, по которым у оппозиции с партией президента были принципиальные разногласия. Таких вопросов оказалось относительно немного, и результаты голосования по ним сведены в табл.1. Предварительно вопросы переформулированы в согласии с приведенной выше договоренностью. Для тех, кому это не совсем понятно, поясняю: если партия президента голосует против чего-либо, то вопрос можно переформулировать так: "Вы против этого предложения?". Очевидно, что ответ должен быть "да", т.е. при голосовании это будет означать "за" предложение, заданное в противоположной форме.

Для прогноза воспользуемся формулой (2.11), полагая, что на съезде "болото" было идеальным (μ=0). Получаем

$$\frac{M}{N}=\frac{1000}{1000+250}100=80\%.$$

Таблица 1

Депутаты	Распределение голосов									сред.
за	1538	1505	1546	1542	1485	1507	1398	1464	1428	1490
против	374	349	352	368	452	399	409	463	485	406
воздержались	47	112	52	76	66	73	163	41	74	78
всего	1959	1966	1950	1986	2003	1979	1970	1968	1987	1974
всего-воздер.	1912	1853	1898	1910	1937	1906	1807	1927	1913	1896
% голосов за	80%	81%	81%	81%	77%	79%	77%	76%	75%	79%

Сравнивая этот результат с табличным средним, видим, что имеется хорошее совпадение с погрешностью порядка 1%, однако по отдельным голосованиям расхождение достигает 6~7%. Возникает вопрос: какие факторы можно еще учесть, чтобы добиться лучшего совпадения?

Для этого мы попробуем использовать общую модель (1.1) в рамках следующей гипотезы. Во времена обсуждаемого съезда влияние будущего президента на рядовых депутатов было велико. В основном оно, конечно, распространялось на представителей "болота", которые чутко реагировали на поведение президента. Тот, кто смотрел съезд по телевизору или читал его материалы, возможно заметил, а кто не заметил – должен поверить на слово, что поведение президента, когда он вел заседания съезда, не всегда было беспристрастным. В некоторых случаях он проявлял явную заинтересованность в положительных результатах голосования, в некоторых выглядел сомневающимся, а иной раз казалось, что он против. Наблюдая за поведением президента, "болото", в силу своей повышенной зависимости, делало выводы и вносило коррективы в голосование. Мне кажется, что с точки зрения "болота" результаты табл. 1 можно сгруппировать по следующему принципу: в первую группу отнести результаты, когда казалось, что президент проголосует "за" (P_0=1); во вторую, когда казалось, что он колеблется (P_0=0.5); в третью группу, когда можно подумать, что президент "против" (P_0=0). Такой перегруппировкой табл. 1 преобразуется в табл. 2. В этой таблице появилась строка со значениями количественного состава "болота" при каждом голосовании. Так как в расчетной формуле мы обязаны использовать одно значение, то естественно взять среднее.

Таблица 2.

Президент	за				колеблется			против		сред.
P_0	1,0				0,5			0,0		0,6
Депутаты	Распределение голосов									сред.
за	1538	1505	1546	1542	1485	1507	1398	1464	1428	1490
против	374	349	352	388	452	399	409	463	485	406
воздержались	47	112	52	76	66	73	163	41	74	78
всего	1959	1966	1950	1986	2003	1979	1970	1968	1987	1974
всего-воздер.	1912	1853	1898	1910	1937	1906	1807	1927	1913	1896
"болото" (r)	662	603	648	680	687	656	557	677	663	646
% голосов за	80%	81%	81%	81%	77%	79%	77%	76%	75%	79%
Расчет	81%				78%			75%		78%

Теперь надо показать, как трансформируется модель сообразно этому случаю. Обратимся к стохастической матрице взаимных влияний Λ. Обозначим взаимное влияние депутатов друг на друга через λ, т.е. $\lambda_{ji}=\lambda$ (i>1, j>1), а влияние президента на депутатов λ_{j1} через λ_0. Влияние депутатов на президента несущественно, так как он ведет себя, как фигура абсолютно независимая. Назовем λ_0 рейтингом президента, а λ – рейтингом рядового депутата. В силу свойств матрицы Λ эти рейтинги связаны условием $\lambda_0 + (N\text{-}2)\lambda = 1$. Депутатов много, поэтому рейтинги будут выражаться очень маленькими числами. Чтобы избежать этого неудобства, введем для их измерения другой масштаб: положим $\lambda=\Delta/(N\text{-}1)$, $\lambda_0=\Delta_0/(N\text{-}1)$. Тогда связь между рейтингами станет выглядеть следующим образом:

$$\Delta_0 + (N-2)\Delta = N-1. \qquad (2.12)$$

С учетом этих допущений исходная система (1.1) принимает вид

$$P_j = \alpha_j \mu_j + \frac{1-\mu_j}{N-1}\Delta \sum_{i=1}^{N} (1-\delta_{ji}) P_i + \frac{1-\mu_j}{N-1}\left[N-1+(N-2)\Delta\right] P_0, \quad j = 2,3,\ldots,N.$$

Эта система уравнений, так же как и система (2.1), допускает аналитическое решение, и мы сразу приведем выражение для доли депутатов, проголосовавших "за":

$$\frac{M}{N}=\frac{q+(1-\Delta)rP_0}{p+q+(1-\Delta)r}. \tag{2.13}$$

Оно превращается в формулу (2.11), если $\Delta=1$. В общем случае значение этого параметра невозможно определить без привлечения конкретных данных по голосованиям. Подставляя данные из табл. 2 в (2.13), получим серию уравнений для определения Δ при каждом голосовании. Из них определятся значения этого параметра с некоторым разбросом: $\Delta=1.00$; 0.89; 0.89; 0.90; 0.80; 0.93; 0.75; 0.90; 0.87; это вполне естественно, так как задача определения параметра Δ некорректна и требует регуляризации. Мы применим самую примитивную регуляризацию: возьмем среднее арифметическое, что вполне обеспечит нам допустимую точность. Итак, $\Delta=0.88$, при этом мы также будем пользоваться средним арифметическим значением параметра r=646. Теперь формула (2.13) принимает конкретный вид

$$\frac{M}{N}=\frac{1000+0.12\cdot 646P_0}{1250+0.12\cdot 646}.$$

Из нее следует, что при $P_0=1.0$ получаем $M/N=0.81$; при $P_0=0.5$ – $M/N=0.78$; при $P_0=0.0$ – $M/N=0.75$. Это дает совпадение с данными съезда по группам с точностью порядка 1%, что можно считать идеальным результатом. Итак, рейтинг депутата $\Delta=0.88$. Определим рейтинг президента: $\Delta_0=1895-0.88\cdot 1894=226$, т.е. рейтинг будущего президента на съезде был высок, он превосходил средний рейтинг депутата в 257 раз. Однако на выборах он получил меньше голосов, чем предсказала бы модель. Объяснение очевидно. По этому вопросу произошел раскол в партии президента, и часть ее проголосовала против. Но все это уже история – "дела давно минувших дней...".

Выборы. Обратимся теперь к истории недавних дней. В России прошли выборы президента. И страна и президент уже были другими, и выбирали президента не на съезде, а *всенародно*. То есть ситуация в корне отличается от предыдущей. Поэтому интересно посмотреть, дает ли возможность обсуждаемая модель проанализировать и эти события. Чтобы справиться с такой задачей, надо понять, что представляет собой коллектив взаимных влияний, в котором решается проблема выбора. Всенародность – понятие довольно расплывчатое, и, если под ней подразумевать все население страны, то задача становится безнадежной. Поэтому необходимо определить ту *элементарную* общественную ячейку, в которой принимаются основные решения. Кажется естественным за такую ячейку принять *семью*. Так и поступим. Рассмотрим *среднюю семью*, вероятнее всего, состоящую из *четырех* человек. Не станем конкретизировать ее персональный состав, однако заметим, что она будет "неполной", если не включить в ее состав "на равных правах" *телевизор*. Мне думается, что в современной семье он стал полноценным членом, хотя в выборах и не участвует. Но это не означает, что по отношению к выборам у него нет твердого и определенного мнения. На прошедших выборах он был *целиком на стороне ныне здравствующего президента.*

Итак в нашей условной семье *пять* субъектов. Один из них, далее именуемый как *телевизор*, имеет следующие параметры: $\mu=1$, $P_0=\alpha_0$. Остальных членов семьи мы не будем различать по персоналиям и положим: $P_j=P$, $\alpha_j=\alpha$, $\mu_j=\mu$. Используем в этом случае вариант модели (2.1), где для удобства заменим N на N+1, чтобы отделить *телевизор* от *живых членов семьи*. Формулы (2.2) после элементарных выкладок дают результат, который можно представить следующим образом:

$$P = \frac{M}{N} = \frac{N\alpha\mu + (1-\mu)\alpha_0}{1+(N-1)\mu}. \tag{2.14}$$

При N=4 получаем

$$P = \frac{M}{4} = \frac{4\alpha\mu + (1-\mu)\alpha_0}{1+3\mu}. \tag{2.15}$$

Теперь надо определиться с параметрами α_0 и μ. С параметром α дело обстоит сложнее, и мы уточним процедуру его определения позднее. Параметр μ положим равным 1/2, рассчитывая на "средне зависимого" индивида, а параметр α_0=1, так как *телевизор* был всецело на стороне нынешнего президента

Тот, кто помнит прошедшие выборы, должен согласиться, что всю выборную компанию можно разбить на три этапа. Первый этап начинался за несколько месяцев до официальной предвыборной компании. Президенту старались подтянуть рейтинг к ее началу. *Телевизор* пытался убедить избирателей, что другой альтернативы попросту нет. Второй этап совпадал с официальной предвыборной компанией перед первым туром. На этом этапе пропаганда усиливалась – *телевизор* не умолкал. Третий этап перед вторым туром ни в чем не уступал второму этапу – давление на избирателей усиливалось.

Принимая сказанное выше как рабочую гипотезу, займемся исследованием этапов. На каждом этапе будем использовать формулу (2.15). Причем, как и в задаче о *переговорах*, будем считать, что апостериорная вероятность P в конце предыдущего этапа становится априорной α в начале следующего. На всех этапах у *телевизора* α_0=1.

Теперь формулу (2.15) можно представить в виде

$$P^{(n)} = \frac{4P^{(n-1)}+1}{5}, \quad P^{(0)} = \alpha^{(1)}. \tag{2.16}$$

Величина вероятности P, как это видно из (2.14), представляет собой долю избирателей, готовых проголосовать за действующего президента. В согласии с *телевизором* будем называть ее рейтингом действующего президента (об этом рейтинге регулярно сообщалось по телевидению по результатам так называемых опросов населения). У меня нет доверия к этим опросам, но даже они показывали, что к первому этапу рейтинг был низким. Так как целью этого пункта статьи является оценить роль телевидения в выборной компании, то я намеренно занижу рейтинг президента перед первым этапом, положу $P^{(0)}=\alpha^{(1)}$=0. Тогда по формуле (2.16) *телевизор* к концу первого этапа перед официальной предвыборной компанией *создаст* президенту рейтинг $P^{(1)}$=0.20, т.е. 20% избирателей будут готовы отдать свой голос за президента. К концу второго этапа, к первому туру выборов, из (2.16) следует, что к урнам придут избиратели с намерением отдать за президента 36% голосов, т.е. $P^{(2)}$=0.36. В действительности за президента в первом туре было отдано 35.28% голосов. Расхождение в результатах не превышает 0.72%; относительная погрешность равна 0.0223, т.е. порядка 2%. Это очень неплохо для столь грубой схемы. С третьим этапом дело обстоит сложнее. На третьем этапе происходило перераспределение голосов избирателей, отданных за не прошедших во второй тур кандидатов. Предложенная нами схема таких тонкостей не улавливает, тем более мы помним, что у президента образовался альянс с одним из не прошедших во второй тур, однако набравшем неплохой процент голосов, кандидатов. Если же этими *нюансами* пренебречь, то (2.16) дает следующий результат по второму туру: $P^{(3)}$=0.4880, т.е. 48.80% голосов. Таким образом, из нашей схемы следует, что одного *телевизора* недостаточно, чтобы президент выиграл выборы во втором туре. Однако это теперь тоже уже история, которую, как известно, "вспять не повернуть".

Существуют еще некоторые данные, на которых можно проверить формулу (2.16). А именно: опросы избирателей об их намерениях придти к избирательным урнам и фактический процент явки в первом туре. По опросам получалось так, что к началу первого этапа посетить избирательные участки собиралось примерно 50% избирателей. Телевидение всячески старалось убедить граждан повысить процент явки. Формула (2.16) показывает, что к началу второго этапа, т.е. к открытию официальной предвыборной компании *телевизору* удалось повысить эту величину до 60%. В течение второго этапа давление на телезрителя не ослабевало – все помнят лозунг: "Голосуй, а то проиграешь!" Используя формулу (2.16) и на втором этапе, получим прогноз процента явки избирателей на первый тур выборов. Элементарный подсчет дает величину, равную 68%. Официально опубликованная величина составляет 69.81%, т.е. имеет место хорошее совпадение с прогнозом.

На этом я кончаю анализ частных примеров и перехожу к обсуждению вопросов, имеющих более общий характер: роль конформизма в общественной жизни, его влияние на стабильность и управляемость общества. Поясню, что *конформизм* означает для меня здесь: *подражательный, подобный*. Именно такой механизм в простейшей форме и заложен в обсуждаемой модели, хотя степень *подражательности* может быть разной: от нулевой до полной.

3. Конформизм – плюсы и минусы. В связи со сказанным выше параметр модели $k_j=1-\mu_j$ можно назвать *степенью конформизма* индивида, а параметр μ_j соответственно – *степенью индивидуализма.* Эти параметры описывают весь спектр индивидов от крайних конформистов ($k_j=1$) до не менее крайних индивидуалистов ($\mu_j=1$). Не надо путать конформистов с *коллективистами.* Конформизм – это психический тип личности, а *коллективизм,* в определенном смысле – идеология, которую зачастую проповедуют индивидуалисты. Для властолюбивых индивидуалистов коллектив конформистов – благодатная среда для удовлетворения своих властных наклонностей. Поэтому абсолютный конформизм является почвой, питающей корни *тоталитаризма,* что бы при этом в обществе ни исповедовалось: *коммунистический распределительный рай* или *демократическая рыночная идиллия.* Однако это вовсе не означает, что сам по себе конформизм плох. Не будь такого явления, не было бы человеческого общества как такового. Без способности воспринимать иные мнения, без дара к подражанию невозможно было бы обучение, а, следовательно, и возникновения того, что мы называем интеллектом, так как он дан человеку в потенции и может развиться у него лишь в общении с окружающими людьми. Известно, что у так называемых "маугли", воспитанных животными, пробудить интеллект уже невозможно. Поэтому *конформизм* – великое благо, обретенное человеком в процессе эволюции, чтобы он мог жить и успешно развиваться, если, конечно, не впадает в крайность. А рецепт от крайности давно известен: "не сотвори себе кумира". Проповедовать же индивидуализм, как альтернативу конформизму, по меньшей мере, неразумно, так как на эти проповеди в первую очередь откликнутся конформисты, однако, в силу своей природной сущности, истинными индивидуалистами не станут. Самое большее, на что они будут способны, так это подражать индивидуалистам, а это хуже индивидуализма как такового.

Но это все – слова. Хотелось бы посмотреть, что можно извлечь из модели чисто формальными методами. Например, какими должны быть параметры α_j и μ_j у индивидов, составляющих общество, чтобы все общество в целом пребывало в некотором фиксированном состоянии, т.е. величина $M/N=1$. Нам здесь все равно, что представляет собой это состояние с содержательной стороны. Являет ли оно собой состояние застоя, или состояние стабильного экономического роста, или процесс реформирования.

Итак, пусть $M/N=1$. Из второй формулы (2.3) следует, что при этом

$$\sum_{i=1}^{N}\alpha_i\mu_i = \sum_{i=1}^{N}\mu_i \quad \text{или} \quad \sum_{i=1}^{N}(1-\alpha_i)\mu_i = 0. \tag{3.1}$$

Так как $\alpha_i \leq 1$, а $\mu_i \geq 0$, то (3.1) эквивалентно системе равенств

$$(1-\alpha_i)\mu_i = 0, \quad i = 1,2,\ldots,N. \tag{3.2}$$

Здесь возможны два варианта: первый – все $\mu_i=0$ и второй – не все $\mu_i=0$, т.е. существуют $\mu_r>0$, $r \in R$. Первый вариант соответствует *стадному* обществу. Он, как мы уже знаем, не гарантирует стабильности состояния – как угодно малое возмущение одного из параметров μ может перевести общество в любое непредсказуемое состояние. Остается второй вариант, из которого с очевидностью следует: все $\alpha_r=1$, $r \in R$. Но это означает, что в обществе выделилась *партия* – группа единомышленников, которых вполне устраивает данное состояние общества. Остальные члены общества, в силу своего абсолютного конформизма, послушно следуют за ними. Интересно, что из модели, как мы видим, вытекает единственно возможная структура общества, при которой оно целиком пребывает в одном и том же состоянии. Такое общество довольно долго может существовать стабильно, пока в *партии* не будет поколеблено единомыслие или в обществе не появятся достаточно *независимые субъекты* с иными, чем у *партии*, убеждениями. А так как появление таких *субъектов* и в обществе, и в *партии*, рано или поздно, неизбежно, то такое общество тоже не застраховано от радикальных изменений. Я вообще не представляю себе вечно стабильных обществ. Не дает таких примеров и *история*.

Человек, конечно, устроен сложнее, чем любая модель, однако это не означает, что он обладает полной свободой воли. Во многом он раб обстоятельств и своего характера. Поэтому он далеко не всегда повинен в присущем ему конформизме или индивидуализме Нельзя утверждать, что *индивидуализм* являет собой абсолютное зло, хотя я считаю его одним из существенных источников нестабильности в обществе и эксплуатации общественного конформизма в личных, далеко не всегда безобидных, интересах. Но без индивидуалистов не было бы независимых идей и суждений, не было бы критического отношения к состоянию общества, живая мысль не оплодотворяла бы общественного инстинкта. Так же нелепо было бы считать *конформизм* абсолютным благом, хотя, опять-таки, я считаю его ценнейшим божественным даром, делающим человека контактным, способным прислушиваться к иному мнению, развиваться интеллектуально, в конце концов, приходить к ближнему на помощь не ради личной выгоды, а по велению сердца. Однако общество *абсолютных конформистов* слишком уж легко управляемо и может быть направлено *злой волей* на преступные деяния, что, к сожалению, не раз случалось в истории. Стабильность абсолютно конформистского общества во главе даже с очень *высоконравственными лидерами* напоминала бы закоснелую стабильность муравейника или термитника, где за миллионы лет ничего по существу не изменилось. На эту тему существует замечательное высказывание Анри Пуанкаре в его знаменитой книге "Наука и метод": "Я не желал бы ни этой плутократии, жадной и ограниченной, ни этой демократии, добродетельной и посредственной, всегда готовой подставить левую щеку; демократии, среди которой жили бы мудрецы, лишенные любознательности, люди, которые, избегая всякого излишества, не умирали бы от болезни, но наверняка погибали бы от скуки."

Так существует ли общество, лишенное таких недостатков? Что можно сказать об обществе индивидов, у которых индивидуализм и конформизм как-то сбалансированы, например, параметр $\mu_i=k_i=0.5$? Из (3.2) следует, что при наличии так называемого *плюрализма мнений*, когда не все $\alpha_i=1$, общество не будет целиком находиться в данном состоянии, как и ни в каком другом, если только это другое не окажется устраивающим всех. Но тогда не будет пресловутого плюрализма мнений, так как общество придет к согласию: все $\alpha_i=1$. А это, очевидно, *утопия в чистом виде*. Если быть последовательным, то *идеалом плюрализма* естественно считать в определенном смысле *равномерное* распределение всевозможных мнений в обществе по отношению к данному конкретному состоянию; попросту говоря, у каждого индивида имеется свое, отличное от других, мнение – уж быть плюралистами, так быть. Если упорядочить индивидов по возрастанию величины α_i, то формально это будет выглядеть так:

$$\alpha_i = \frac{i-1}{N-1}. \qquad (3.3)$$

Подставляя (3.3) в (2.3), получим

$$P_i = \frac{N-1+2(i-1)}{4(N-1)}, \qquad \frac{M}{N} = \frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(i-1) = \frac{1}{2}. \qquad (3.4)$$

Как и следовало ожидать, только половина общества в среднем будет пребывать в данном состоянии. Но интересно другое: какова будет энтропия в таком обществе как мера хаоса в нем, или, наоборот, как мера его упорядоченности? В нашем случае выражение для энтропии будет выглядеть следующим образом:

$$H = -\sum_{i=1}^{N}[P_i \log_2 P_i + (1-P_i)\log_2(1-P_i)]. \qquad (3.5)$$

Прежде, чем производить какие-либо вычисления по этой формуле, выпишем выражение для $1-P_i$. Оно имеет вид

$$1-P_i = \frac{3(N-1)-2(i-1)}{4(N-1)}.$$

Если в этой формуле изменить нумерацию, положив $i=N+1-j$, то мы получим

$$1-P_{N+1-j} = \frac{N-1+2(j-1)}{4(N-1)}. \qquad (3.6)$$

Сравнивая (3.6) с первой формулой из (3.4), видим, что $P_j=1-P_{N+1-j}$, или (так удобнее) $1-P_j=P_{N+1-j}$, откуда следует, что (3.5) можно переписать в виде

$$H = -\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i - \sum_{j=1}^{N} P_{N+1-j}\log_2 P_{N+1-j}.$$

Возвращаясь во второй сумме к прежней нумерации, окончательно получаем

$$H = -2\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 P_i = 2\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 \frac{1}{P_i}.$$

Эта формула позволяет грубо, но вполне достаточно для наших нужд, оценить значение энтропии снизу:

$$H > 2\sum_{i=1}^{N} P_i \log_2 \frac{1}{\max\limits_i P_i} = 2\sum_{i=1}^{N}\frac{N-1+2(i-1)}{4(N-1)}\log_2\frac{4}{3} = N\log_2\frac{4}{3} \cong 0.41N.$$

Отсюда видно, что мера хаоса в таком обществе очень велика. Чтобы узнать, в каком конкретно состоянии на данный момент оно находится, необходимо произвести в нем более чем $0.41N$ замеров его социальных, экономических и политических *параметров*, на худой конец, опросить более 40% дееспособного населения, что в большой стране практически невозможно, а если и возможно, то чрезвычайно трудно и дорого. По существу, в таком обществе немыслима никакая целенаправленная реформаторская деятельность. По этой же причине такое состояние общества достаточно стабильно: малым изменением параметра μ его трудно перевести в иное, резко отличное от данного состояние. Я не исключаю при этом так называемую *самоорганизацию,* в особенности после потрясения общества разного рода *шоковыми терапиями*. Однако эта самоорганизация, как показывает жизнь, приводит к распаду общества на группировки, промышляющие криминалом. Впоследствии такой опыт может оказаться даже весьма прибыльным для общества, если сфера действия особо опасного для государства криминала будет вынесена за его пределы. Сращивание криминальных структур с государственным аппаратом позволяет узаконить подобный опыт как *свободное предпринимательство*, а общество объявить *правовым,* что не без успеха давно проделано в некоторых пресловутых *цивилизованных* странах, но это уже вопрос *нравственности*. Я говорю об этом здесь не потому, что озабочен положением с нравственностью в этих странах, а потому, что наши *доморощенные либералы* очень сильно уповали на упомянутую *самоорганизацию* в условиях *плюрализма и экономических свобод*, однако жизнь показала, какова эта самоорганизация (во всяком случае, в начальной стадии), и я думаю, что другой не бывает. Трудно представить себе, как уберечь общество от *криминальной самоорганизации* в условиях безграничного плюрализма, экономического хаоса и политического безволия. Не дает ответа на эти вопросы и модель, так как подобные механизмы не описывает.

Остается посмотреть, что может представлять собой общественная структура, в которой энтропия равна нулю. Из (3.5) с очевидностью следует, что это возможно лишь в одном случае, если набор значений P_i состоит только из нулей и единиц, т.е. общество представляет собой, по меньшей мере, *двуполярный* мир (ситуацию, когда все P_i=0 или 1, я считаю нереальной). Здесь нам представляется два случая. Первый очевиден и не интересен: все общество изначально расколото на два абсолютно изолированных лагеря, отгороженных друг от друга *железным занавесом*. Второй случай, когда в обществе возможны любые контакты, менее тривиален, так как накладывает определенные ограничения на параметры μ_i и априорные вероятности α_i. Действительно, пусть у K членов общества P_k=1, а у остальных $S=N-K$ будет P_s=0. Тогда из (2.3) следует, что

$$1 = \alpha_k \mu_k + (1-\mu_k)\frac{K}{N}, \quad k = 1,2,\ldots,K,$$

$$0 = \alpha_s \mu_s + (1-\mu_s)\frac{K}{N}, \quad s = K+1,\ldots,N,$$

или, в более удобной для анализа форме,

$$(1-\alpha_k)\mu_k + (1-\frac{K}{N})(1-\mu_k) = 0, \qquad \alpha_s\mu_s + \frac{K}{N}(1-\mu_s) = 0, \quad 0 < \frac{K}{N} < 1.$$

Анализ показывает, что эти ограничения выполняются лишь при одном условии, когда все α_k=1, все α_s=0, а все $\mu_k=\mu_s$=1. Отсюда следует, что разделение общества, как минимум, на два лагеря происходит в этом случае в силу твердого (так как все μ_i=1) различия в убеждениях, покоящихся на различных идеологических или религиозных концепциях. Такое разделение достаточно стабильно, так как априорные убеждения совпадают с апостериорными. Мир идеально упорядочен – энтропия в таком мире равна нулю. Во всех других случаях в мире, в той или иной степени, будет присутствовать элемент хаоса.

В заключение я еще раз хочу подчеркнуть, что человеческое общество значительно сложнее любых математических моделей. Так, например, параметр μ, характеризующий психический склад индивида, далеко не всегда является для него фатальной константой. Ее значение во многом определяется обстоятельствами. Один и тот же индивид в одной ситуации может проявить себя как чистый индивидуалист, а в другой – как слабохарактерный конформист. Не зря говорят, что в толпе человек чувствует себя потерянным – почти все превращаются в конформистов. Поэтому требуется определенное искусство, чтобы правильно идентифицировать параметры модели, как, впрочем, и при работе с любыми другими моделями. Мне кажется, что предпринятая мною попытка формализовать самые простейшие взаимоотношения все-таки что-то проясняет и чему-то учит. Возможно, я слишком вольно интерпретировал некоторые результаты. Однако избавиться от ощущения, что в этом что-то есть, я не могу.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гантмахер Ф.Р.* "Теория матриц". -М.: Наука, Главная редакция физмат литературы, 1967.

Поступила в редакцию 02.06.98.